Lernbereich: Näherungsverfahren als Grenzprozesse

INHALT

1. GRUNDSÄTZLICHE BEMERKUNGEN ZU DIESEM LERNBEREICH

Am Ende von Jahrgang 10 sollen die Schülerinnen und Schüler über die folgenden inhaltsbezogenen Kompetenzen verfügen (vergl. KC für das Gymnasium Schuljahrgänge 5-10 Abschnitt 3.2.1 Zahlen und Operationen):

Die Schülerinnen und Schüler

- grenzen rationale und irrationale Zahlen voneinander ab
- begründen die Notwendigkeit der Zahlbereichserweiterungen
- beschreiben und reflektieren Näherungsverfahren und wenden diese an
- identifizieren den Grenzwert als die eindeutige Zahl, der man sich bei einem Näherungsverfahren beliebig dicht annähert
- erläutern die Identität $0,\overline{9}=1$ als Ergebnis eines Grenzprozesses
- interpretieren exponentielle Abnahme und begrenztes Wachstum als Grenzprozess
- identifizieren π als Ergebnis eines Grenzprozesses
- bestimmen die Formeln für den Umfang oder den Flächeninhalt des Kreises mit einem Näherungsverfahren.

In früheren Lernbereichen haben die Schülerinnen und Schüler bereits mit periodischen Dezimalbrüchen, Wurzeln und Näherungswerten für π gearbeitet. Theoretische Untersuchungen der jeweils neuen Zahlen waren für die Schülerinnen und Schüler der betreffenden Altersstufe jedoch meist zu abstrakt. Deshalb standen nicht die zugehörigen Grenzprozesse im Vordergrund sondern die (angenäherten) Ergebnisse, denn das Anliegen war in der Regel, einen Zahlenwert zum Rechnen zu haben. Diese Vorgehensweise scheint der bisherigen Unterrichtspraxis bei der Einführung von Wurzeln zu widersprechen, denn die Schülerinnen und Schüler arbeiten mit Zahlen, die sie mathematisch noch nicht vollständig verstanden und von denen sie eher eine intuitive Vorstellung haben. Andererseits wird die Natur von Sinus- und Logarithmuswerten nicht thematisiert; man geht auch mit ihnen naiv um. Ebenfalls erfolgt die Einführung der negativen Zahlen so, dass Schülerinnen und Schüler diese zunächst noch nicht vollständig begrifflich verstehen. Die Geschichte der Mathematik zeigt, dass der Umgang mit den Objekten der begrifflichen Klärung häufig vorausging.

Das Kennenlernen von neuen Zahlen ist ein langfristiger Prozess.
Das Verständnis eines neuen Zahlbereichs erfolgt dabei auf unterschiedlichen Stufen, von denen jede für den Lernprozess der Schülerinnen und Schüler bedeutsam ist:
Zunächst werden die Grenzen des bisherigen Zahlbereichs überschritten. Es öffnet sich ein neuer Bereich, bei dessen Erkundung neue Erkenntnisse gewonnen werden. Dabei haben die Schülerinnen und Schüler intuitive Vorstellungen über die jeweils neuen Zahlen und die zugehörigen Rechenregeln. Anschließend erkunden sie Eigenschaften dieser Zahlen und die Bedeutung der Regeln für das Rechnen. Rechenregeln werden nur exemplarisch begründet; im Zentrum stehen eine angemessene Sicherheit beim Rechnen und der Ausbau der passenden Grundvorstellungen. Erweitert wird dieses inhaltliche Verständnis der neuen Zahlen durch Vergleiche mit den Eigenschaften der alten Zahlen und Regeln. Dieser Schritt wird bei der Einführung der reellen Zahlen von einer Reflexion des gesamten Vorgehens begleitet. Dabei wird auch eine Rückschau der bisherigen Zahlbereichserweiterungen vorgenommen.

Im Lernbereich „Näherungsverfahren als Grenzprozesse“ werden nun die Grenzprozesse selbst betrachtet. Dazu werden einige der früher unterrichteten Inhalte reflektiert, vertieft und neu strukturiert. Ziel ist ein verständiger und nachhaltiger Umgang mit Grenzprozessen, der sich auf die Anschauung gründet.

Daher sollten Grenzprozesse so lange wie möglich verbal beschrieben und möglichst graphisch veranschaulicht werden. Die Limes-Schreibweise sollte im Unterricht erst dann erfolgen, wenn deren Bedeutung für die Schülerinnen und Schüler offenkundig ist.

2. ERLÄUTERUNGEN UND ANREGUNGEN ZU EINZELNEN INHALTEN

a. Periodische Dezimalbrüche

Die Identität $0,\overline{9}=1$ kann von Schülerinnen und Schülern ohne Betrachtung von Grenzprozessen begründet werden (siehe unten). Sie soll hier jedoch als Ergebnis eines Grenzprozesses begründet werden.

$0,\overline{9}$ selbst ist das Ergebnis eines Grenzprozesses „Anhängen immer weiterer Neunen“.

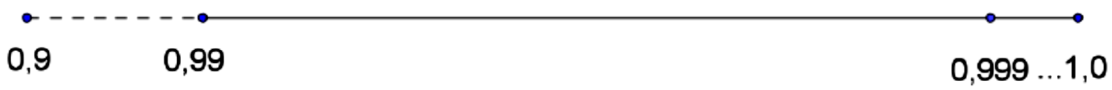
Näherungsprozesse sind den Schülerinnen und Schülern schon früher bei den periodischen Dezimalbrüchen begegnet, ohne dass diese als solche thematisiert wurden.

Die Frage, wie groß $0,\overline{9}$ ist, ist für manche Schülerinnen und Schüler verwirrend: Ist wirklich $0,\overline{9}=1$?

Dafür ist die Argumentation, dass man ausgehend von 0,9 „immer mehr Neunen anhängt“ und damit „immer näher an die $0,\overline{9}$ herankommt“, ergiebig.

Die Frage, „wie nahe man an 1 herankommt“, lenkt den Blick auf den Abstand.

Der Abstand zu 1 wird immer kleiner und nähert sich an 0 an.



$$\begin{array}{ccccc}
1 & - & 0{,}9 & = & 0{,}1 \\
1 & - & 0{,}99 & = & 0{,}01 \\
1 & - & 0{,}999 & = & 0{,}001 \\
\dots & - & \dots & = & \dots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
1 & - & 0{,}\overline{9} & = & 0
\end{array}$$

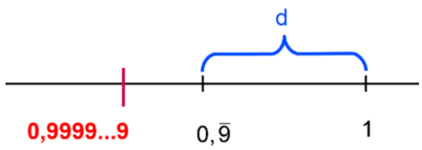
Aus der letzten Zeile folgt die Identität.

Die Annahme, dass $0,\overline{9}\neq 1$ ist, führt zum Widerspruch (vergl. [2] S.28ff).

Jede Zahl 0,9999…9 mit endlich vielen Neunen hinter dem Komma liegt links von $0,\overline{9}$.

Ist $0,\overline{9}<1$, so haben beide Zahlen einen Abstand d voneinander.

Dann findet man für jeden Abstand d eine Zahl 0,999…9 mit noch mehr Neunen hinter dem Komma, die rechts von $0,\overline{9}$ liegt. Das kann aber nicht sein.



Insgesamt werden also hier zwei Ziele deutlich: Einerseits wird die Identität $0,\overline{9}=1$ begründet und andererseits eine Vorstellung eines Grenzprozesses erzeugt.

Die Identität kann auch ohne Verwendung von Grenzprozessen begründet werden.

So kann argumentiert werden, dass $0,\overline{9}$ dreimal so groß wie $0,\overline{3}$ ist, also ist $0,\overline{9}$ auch dreimal so groß wie $\frac{1}{3}$ und damit 1.

Eine weitere Möglichkeit, die Identität $0,\overline{9}=1$ zu begründen, ist:

$\frac{1}{9}=0,\overline{1}$ $\quad$ $\frac{2}{9}=0,\overline{2}$ $\quad$ $\frac{3}{9}=0,\overline{3}$ $\quad$ ... $\quad$ $\frac{9}{9}=0,\overline{9}=1$

Die schriftliche Division $\frac{1}{9} = 1:9$ ergibt den Zugang:

$$\begin{array}{l} 1{,}0\ :9 = 0{,}1111\ldots \\ \underline{\ 9} \\ \ \ 10 \\ \ \ \underline{\ 9} \\ \quad \ldots. \end{array}$$

Beim Dividieren bleibt immer ein Rest, der jedoch von Stufe zu Stufe immer näher an null herangeht.

Solche Argumentationen nehmen jedoch den Grenzprozess nicht explizit in den Blick.

b. Quadratwurzeln

Wird eine Quadratwurzel, z.B. $\sqrt{2}$, mit einem Näherungsverfahren bestimmt, werden Grenzwertvorstellungen (weiter-) entwickelt.
Beim Heron-Verfahren (vergl. eingeführte Schulbücher) wird einerseits numerisch der gesuchte Zahlenwert angenähert. Darüber hinaus können die Schülerinnen und Schüler anschaulich sehen, wie sich ein Rechteck mit dem Flächeninhalt 2 an ein flächeninhaltsgleiches Quadrat annähert.
Die rekursiv erzeugten Seitenlängen a_1, a_2, a_3,… der Rechtecke nähern sich der Seitenlänge des Quadrates an in dem Maße, wie die Abstände der Seitenlängen der Rechtecke von der Quadratseitenlänge gegen null gehen.

Es wird also nicht die Seite eines Quadrats mit dem Flächeninhalt 2 berechnet, sondern es werden die Seitenlängen von Rechtecken berechnet. Dabei nähern sich die Rechtecke dem Quadrat immer mehr an.
Auch das im 10. Iterationsschritt gewonnene Rechteck ist kein Quadrat, auch nicht das im 10.000-ten Schritt gewonnene. Man kann nur sagen: Der Flächeninhalt des im 10.000-ten Schritt gewonnene Rechtecks wird sich vom Flächeninhalt des Quadrat kaum noch unterscheiden und damit auch nicht die Seitenlängen des Rechtecks von der des Quadrats. Aber der Unterschied ist da, auch wenn er noch so klein ist. Man kann (durch Vergrößerung von n) den Unterschied noch weiter verkleinern, aber man kann nicht erreichen, dass der Unterschied so groß wie null ist.

Das Heronverfahren kann auch auf Intervallschachtelungen führen. Diese können auf zwei Arten erfolgen: Einerseits kann man immer kleiner werdende Intervalle erzeugen, in denen die gesuchte Zahl liegt. Hier erfolgt die Annäherung an die gesuchte Wurzel also von beiden Seiten und die Länge der Intervalle, in denen die Wurzel liegt, geht gegen null.

Es ist $1 < \sqrt{2} < 2$, da $1<2<4$ ist.

Es ist $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$, da $1{,}96 < 2 < 2{,}25$ ist.

Es ist $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$, da $1{,}9881 < 2 < 2{,}0164$ ist.

Es ist $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$, da $1{,}999396 < 2 < 2{,}002225$ ist.

.....

Die Intervalllängen 1; 0,1; 0,01; 0,001; …. gehen gegen null. Jedoch werden sie niemals null. Auch wenn man die Anzahl der Nachkommastellen beliebig vergrößert, erhält man nur einen Näherungswert der Quadratwurzel und nicht die Wurzel selbst. Man kann nur die Abweichung beliebig klein machen (vergl. eingeführte Lehrbücher).

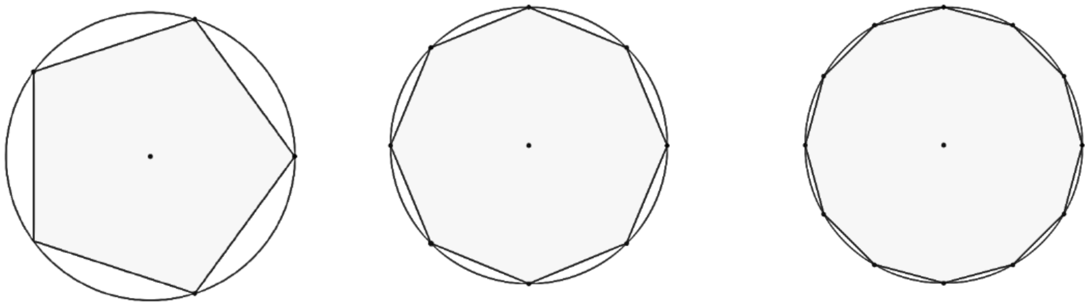
Alternativ kann die Annäherung an die gesuchte Wurzel auch nur von einer Seite erfolgen.

c. Kreiszahl π

Im Lernbereich „Kreis- und Körperberechnungen“ sind zwei Vorgehensweisen möglich: Es kann zunächst ganz praktisch ein Näherungswert für π bestimmt werden, mit dem dann Berechnungen an Kreisen und Körpern durchgeführt werden. In dem Fall kann π experimentell z.B. als Proportionalitätskonstante von Umfang oder Flächeninhalt und Radius verschiedener Kreise bestimmt werden oder stochastisch mit der Monte-Carlo-Methode oder geometrisch durch Zerlegen eines Kreises in Kreissegmente und Zusammenlegen dieser Segmente zu einem „Rechteck“ oder durch Auslegen eines Kreises mit beliebig vielen ein- oder umbeschriebenen Dreiecken. Anregungen liefern die eingeführten

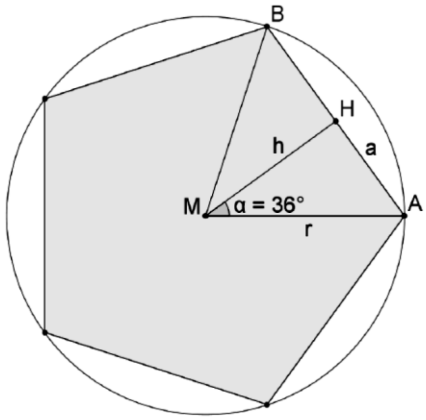
Schulbücher. In jedem Fall kann dabei zunächst ein Näherungswert für π gewonnen werden, ohne auf den Näherungsprozess einzugehen.
Dieses würde später erfolgen, wenn z.B. die Kreisfläche durch die Ausschöpfung mit Vielecken angenähert wird. Auch hier ist (ähnlich zum Vorgehen bei der Intervallschachtelung) die Annäherung mit ein- und umbeschriebenen Vielecken möglich oder nur die Annäherung mit ein- oder umbeschriebenen Vielecken.

Beispiel: Flächeninhalt einbeschriebener Dreiecke
Wurden zuvor trigonometrische Zusammenhänge bearbeitet, ist deren Anwendung bei der Berechnung der einbeschriebenen Vielecke auch für Schülerinnen und Schüler naheliegend.



Das einbeschriebene Fünfeck kann in 5 Dreiecke (Innenwinkel 72°) zerlegt werden mit der Höhe h und der Grundseite a und dem Flächeninhalt $A_5 = \frac{a \cdot h}{2}$.
Mit Hilfe der trigonometrischen Beziehungen $\sin(\alpha) = \frac{a}{2r}$ und $\cos(\alpha) = \frac{h}{r}$ folgt für den Einheitskreis (r=1)
und $\alpha = 36°$ beim Fünfeck:

$$A_{5-Eck} = 5 \cdot A_5 = 5 \cdot \frac{2 \cdot \sin(36°) \cdot \cos(36°)}{2}.$$
$$= 5 \sin(36°) \cdot \cos(36°) = 2{,}37764...$$

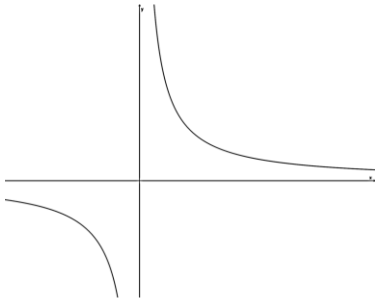


Erhöht man die Zahl n der Ecken, nähert sich der Inhalt der Vielecksfläche
$A_{n-Eck} = n \cdot A_n = n \cdot \sin\left(\frac{360}{2n}°\right) \cdot \cos\left(\frac{360}{2n}°\right)$ immer mehr an der Kreisfläche an.

Das 5-Eck ist kein Kreis, und auch das 10.000-Eck ist kein Kreis. Man kann nur sagen: Der Flächeninhalt des 10.000-Ecks wird sich vom Flächeninhalt des Kreises kaum noch unterscheiden. Aber der Unterschied ist da, auch wenn er noch so klein ist. Man kann (durch Vergrößerung von n) den Unterschied noch weiter verkleinern, aber man kann nicht erreichen, dass der Unterschied null ist.

Beim Einheitskreis wurde festgestellt: Der Flächeninhalt der n-Ecke nähert sich π an, wenn man n vergrößert. Kein n-Eck hat den Flächeninhalt π, der Unterschied ist immer größer als 0, aber so klein, wie wir möchten.
Dieser Sachverhalt ist für Schülerinnen und Schüler oft schwer fassbar und mit Fehlvorstellungen behaftet wie: „Der Kreis hat unendlich viele Ecken". Das würde bedeuten, dass dem Kreis unendlich viele kleine Dreiecke einbeschrieben wären, die jeweils den Flächeninhalt 0 hätten. Damit wäre der Flächeninhalt nicht bestimmbar.

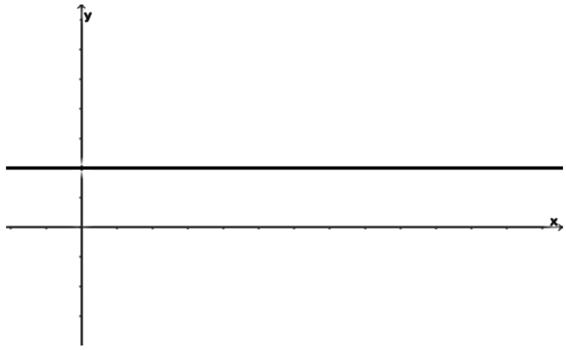
d. Asymptotisches Verhalten



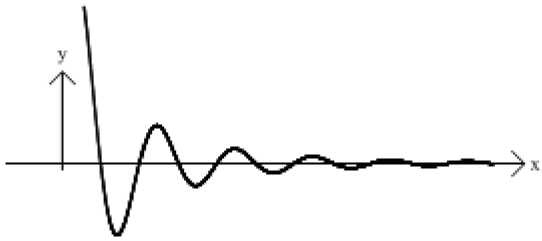
Das Verhalten des Graphen zu $f(x) = \frac{1}{x}$ für $x \to \infty$ ist ein Grenzprozess. Mit wachsendem x geht der Unterschied zwischen $f(x)$ und null gegen null.
Das ist eine komplizierte (aber angemessene) Ausdrucksweise für den anschaulich einsichtigen Sachverhalt, dass $f(x)$ für wachsende x gegen null geht.

Dass die Näherungswerte den Grenzwert nie erreichen, muss natürlich nicht richtig sein; man will ja nicht Phänomene wie die folgenden ausschließen:

Eine konstante Funktion nimmt ihren Grenzwert immer an.



Hier wird der Grenzwert 0 als Funktionswert in periodischen Abständen immer wieder angenommen.



Dieses Beispiel bietet ebenso wie die anfangs betrachtete Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ auch die Möglichkeit, mit der Untersuchung des Verhaltens für $x \to 0$ einen divergenten Prozess zu betrachten.

3. MÖGLICHE EINSTIEGE IN DEN LERNBEREICH

Die Schülerinnen und Schüler haben die Inhalte dieses Lernbereichs zum großen Teil bereits früher kennen gelernt und damit gearbeitet. Mit Hilfe der jeweiligen Näherungswerte für Brüche, Quadratwurzeln oder die Kreiszahl konnten sie ebenso erfolgreich rechnen, Gleichungen lösen oder Terme umformen wie mit Sinus- oder Logarithmuswerten.
Es scheint also sinnvoll, in diesen Lernbereich mit einem für die Schülerinnen und Schüler neuen Problem einzusteigen.

a. Asymptotisches Verhalten

Bei der Behandlung exponentieller Abnahmeprozesse machen die Schülerinnen und Schüler erste Erfahrungen mit asymptotischem Verhalten, wenn sie Funktionen vom Typ $f(x) = b^x$ für $0<b<1$ betrachten. Diese Überlegungen können aufgegriffen und bei der Untersuchung des Verhaltens von $f(x) = \frac{1}{x}$ für sehr große x erweitert werden. $\frac{1}{x}$ wird numerisch betrachtet mit wachsendem x immer kleiner und nähert sich null. Dabei entsprechen die Einzelwerte von $\frac{1}{x}$ jeweils ihrem Abstand vom Grenzwert 0. Graphisch betrachtet nähert sich der Funktionsgraph der Asymptote an, berührt oder schneidet sie jedoch nicht.

b. Zahlbereichserweiterungen (Art der Näherungswerte)

In bisherigen Lernbereichen wurde mit gerundeten Werten für periodische Dezimalbrüche, Quadratwurzeln und für die Kreiszahl π gerechnet.
Die Frage, um welche Art von Zahlen es sich dabei handelt und ob es wirklich rationale Zahlen sind, bietet Anlass zur „genaueren“ Bestimmung von Quadratwurzeln und π mit Hilfe eines Näherungsverfahrens.

Für die periodischen Dezimalbrüche folgt die Untersuchung der Identität $0,\overline{9}=1$.
Die Frage nach der Art der Zahlen führt jedoch auch zur Untersuchung der verschiedenen Zahlmengen und der Zahlbereichserweiterungen.

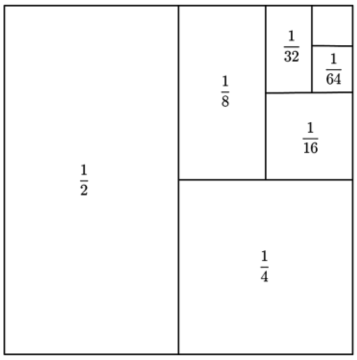
c. Kreiszahl π

Ein möglicher Übergang zur Untersuchung des Näherungsprozesses wurde im vorherigen Abschnitt gezeigt.

d. Unendliche Summen

(Dieser Zugang ermöglicht einen visualisierten Anlass über Grenzwerte nachzudenken. Er geht über die Intentionen des Lernbereiches hinaus. Es ist nicht die Absicht geometrische Reihen zu thematisieren.)

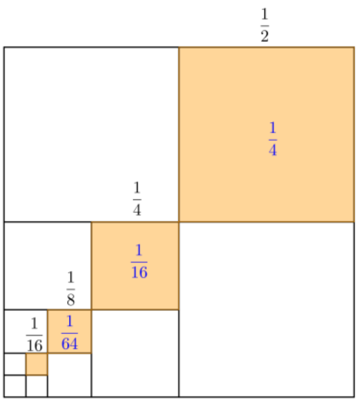
Die Frage nach der Summe $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...$ ist für die Schülerinnen und Schüler wahrscheinlich neu und gibt doppelten Anlass, über die Annäherung an einen Grenzwert nachzudenken. Einerseits gehen die einzelnen Summanden gegen null. Andererseits wird die Summe immer größer, ohne jedoch 1 zu überschreiten.



Zur Veranschaulichung können auch die Quadratseitenlängen in der nebenstehenden Abbildung dienen. Diese nähern sich aneinandergelegt immer mehr der 1 an, was entlang der Mittellinie oder entlang einer der Quadratseiten gut zu sehen ist.

Augenfälliger ist vielleicht die Betrachtung der Quadratflächeninhalte, die auf die Summe $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+...$ führt.

Deren Grenzwert $\frac{1}{3}$ ist ersichtlich, da „jedes Quadrat dreimal vorkommt“ und davon „einmal gezählt“ wird.



4. ERLÄUTERUNGEN UND ANREGUNGEN ZUM VERGLEICH DER NÄHERUNGSPROZESSE

Vergleicht man die verschiedenen Grenzwertprozesse, stellt man als Gemeinsamkeit fest:

- Annäherung an eine Zahl, also an einen Grenzwert
- Abstände der jeweiligen Näherungswerte vom Grenzwert gehen gegen null
- zu jedem Näherungswert kann ein weiterer (oder unendlich viele weitere) gefunden werden mit noch kleinerem Abstand
- die Näherung kann beliebig nah an den Grenzwert herankommen
- der Unterschied zwischen Näherungswert und Grenzwert kann beliebig klein werden
- graphische Veranschaulichung möglich

Gemeinsam ist auch die Strategie zur Bestimmung des jeweils Gesuchten: Wenn man etwas nicht direkt bestimmen kann, bestimmt man etwas, was man bestimmen kann, und sorgt dafür, dass der Unterschied bzw. der dabei entstandene Fehler beliebig klein wird.

Die Näherungsprozesse zeigen jedoch auch Unterschiede:

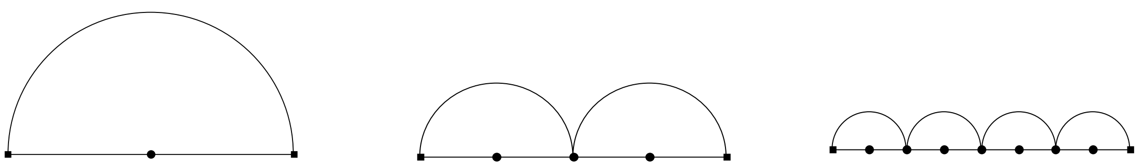
- Annäherung von einer Seite / Annäherung von beiden Seiten
- Abstand vom Grenzwert geht gegen null / Intervalllänge geht gegen null
- Grenzwerte sind rational (1, 0) oder irrational ($\sqrt{2}$, π)

5. EIN MÖGLICHER UNTERRICHTSGANG UND DIE FRAGE DER FORMALISIERUNG

Der Unterrichtsverlauf dieses Lernbereichs wird sicherlich vom gewählten Einstieg abhängen und kann nur beispielhaft dargestellt werden.
In jedem Fall sollte am Einstiegsbeispiel gelernt werden, dass Zahlen durch Grenzprozesse beschrieben werden können. Es kann im Einstieg ausreichen, diesen Sachverhalt nur verbal zu beschreiben.
Bei der Untersuchung der weiteren Grenzprozesse wird diese Erkenntnis bei passenden Gelegenheiten aufgegriffen. So wird deutlich, dass dieses Annäherungs- und Grenzwertverhalten keine Ausnahme ist, sondern ein wichtiges mathematisches Prinzip, was als tragfähige Strategie zur Bestimmung von unbekannten Zahlen oder Größen verwendet werden kann.
Der Vergleich der verschiedenen Grenzwertprozesse erfolgt insgesamt sicher gegen Ende der Einheit. Sinnvoll ist aber auch, bei der Untersuchung eines neuen Grenzprozesses bereits mit jeweils vorherigem Vorgehen zu vergleichen.

Auch die Frage, wann und wie weit die Grenzprozesse formalisiert werden, kann nicht pauschal beantwortet werden. Zur formalen Beschreibung kann die Limes-Schreibweise oder die Pfeil-Schreibweise verwendet werden. Dabei nimmt die Limes-Schreibweise eher den Grenzwert als Ergebnis eines Grenzprozesses in den Fokus und die Pfeil-Schreibweise legt den Fokus auf den Grenzprozess selbst. Es ist nicht notwendig, beide Schreibweisen einzuführen. Die Schreibweise sollte den Argumentationsweisen der Schülerinnen und Schüler angepasst werden und diese sinnvoll verdeutlichen.
Die streng formale Definition des Grenzwertes mit Hilfe der ε-Umgebung ist wenig Verständnis fördernd und sollte nicht eingeführt werden.
Auch die formale Beschreibung der Folgen wird nicht benötigt, um den Grenzwert zu verstehen. Das anschauliche Verständnis der Folgen, das die Schülerinnen und Schüler in früheren Schuljahrgängen erwerben (z.B. wenn Terme zu Punktmustern aufgestellt werden), wird in diesem Lernbereich weiter gefestigt. Eine formale Definition würde die Tragfähigkeit dieser Vorstellung eher schmälern als unterstützen.
Weder die formale Definition der Folgen noch die des Grenzwertes werden im Lernbereich der Änderungsraten benötigt.

Eine rein anschauliche Erarbeitung des Grenzwertbegriffes kann aber auch zu Widersprüchen führen:



Bekannt ist: $U = 2 \cdot \pi \cdot r = \pi \cdot d$. Der Durchmesser des Kreises wird halbiert, Halbkreise werden über den neuen Durchmessern gezeichnet. Dieser Prozess wird fortgesetzt. Anschaulich nähert sich dann die Figur über dem Durchmesser immer besser einer Strecke mit der Länge d an. Also gilt $U = \pi \cdot d$ und $U = 2 \cdot d$. Somit ist also $\pi = 2$. Oder?

Literatur

[1] Vollrath, Hans-Joachim, Weigand, Hans-Georg: Algebra in der Sekundarstufe, Heidelberg (Spektrum Akademischer Verlag), 2009

[2] Danckwerts, Rainer, Vogel, Dankwart: Analysis verständlich unterrichten, Heidelberg (Spektrum Akademischer Verlag), 2006